

Cours 18

Suite d'exemples de $\otimes$

- $(A^{\oplus n}) \otimes_A (A^{\oplus m}) \cong A^{\oplus nm} \cong \text{Mat}_{nm}(A)$

- Bimodules apparaissent naturellement :

$$M \in {}_A \text{Mod}$$

$$\text{Aussi } M \in {}_A \text{Mod}_C \quad \text{avec } C := \text{End}_A(M)^{\text{op}}$$

Vérification : $\forall f \in \text{End}_A(M)^{\text{op}} = C, \forall m \in M$

$$m \cdot f := f(m)$$

$$\begin{aligned} * \quad (m \cdot f_1) \cdot f_2 &\stackrel{?}{=} m \cdot (f_1 \cdot f_2) \\ \parallel &\quad \parallel \leftarrow f_1 \cdot f_2 = f_2 \circ f_1 \\ f_2(m \cdot f_1) &\quad m \cdot (f_2 \circ f_1) \\ \parallel &\quad \parallel \\ f_2(f_1(m)) &= (f_2 \circ f_1)(m) \end{aligned}$$

$$* \quad \forall a \in A, \forall f \in \text{End}_A(M)^{\text{op}} = C \quad \forall m \in M$$

$$(a \cdot m) \cdot f \stackrel{?}{=} a \cdot (m \cdot f)$$

$$\begin{aligned} \parallel &\quad \parallel \\ (am) \cdot f &\quad a \cdot f(m) \\ \parallel &\quad \parallel \\ f(am) &\quad \end{aligned}$$

f est A -linéaire.

$A = \text{anneau}$

$$M := \text{Mat}_{n \times m}(A) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}}_m \right\}_n$$

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(A) \text{ Mod } \text{Mat}_{m \times m}(A)$$

avec la structure de bimodule défini par :

$$P \in \text{Mat}_{n \times n}(A), S \in M = \text{Mat}_{n \times m}(A), Q \in \text{Mat}_{m \times m}(A)$$

$$P \cdot S \cdot Q = PSQ$$

□

— En particulier

$$\underline{n=1} : A^{\oplus m} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}}_m \right\} \in A \text{ Mod } \text{Mat}_{m \times m}(A)$$

$$\underline{m=1} : A^{\oplus n} = \left\{ \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \right\} \in \text{Mat}_{n \times n}(A) \text{ Mod } A$$

$n=m$

$$A^{\oplus n} \otimes_A A^{\oplus n} \simeq \text{Mat}_{n \times n}(A)$$

(Exo)

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \right\} \quad \sum_i (w_i) \otimes (v_i) \mapsto \sum_i w_i \cdot v_i$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} L \otimes C \cong A \\ \parallel \quad \parallel \\ \text{Mat}_{n \times n}(A) \quad \left\{ \begin{pmatrix} & \\ & \vdots \\ & \end{pmatrix} \right\} \end{array} \quad (\text{Exo})$$

$$(v) \otimes (w) \mapsto v \cdot w$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} A \text{ Mod} & \xleftarrow{\sim} & \text{Mat}_{n \times n}(A) \text{ Mod} \\ & \searrow \Phi & \\ M & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} A^{\oplus n} \otimes_A M \\ \parallel \\ \left\{ \begin{pmatrix} & \\ & \vdots \\ & \end{pmatrix} \right\} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L \otimes N & \xleftarrow{\Psi} & N \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Mat}_{n \times n}(A) & & \left\{ \begin{pmatrix} & \\ & \vdots \\ & \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

$$\Psi \circ \Phi(M) = L \otimes_{\text{Mat}_{n \times n}(A)} (C \otimes_A M) \cong \underbrace{(L \otimes_{\text{Mat}_{n \times n}(A)} C)}_{\cong A} \otimes_A M \cong A \otimes_A M$$

$$\Phi \circ \Psi(N) = C \otimes_A (L \otimes_{\text{Mat}_{n \times n}(A)} N) \cong \text{Mat}_{n \times n}(A) \otimes_{\text{Mat}_{n \times n}(A)} N \cong N$$

$$\cong N$$

Thm (Equivalence de Morita)

On a une equivalence de categories

$$A\text{-Mod} \xrightleftharpoons[\Psi]{\Phi} \text{Mod}_{\text{Mat}_n(A)} \quad \forall n \geq 1.$$

e.g. • $N_1 \cong N_2$ dans $\text{Mod}_{\text{Mat}_n(A)}$

$$\Leftrightarrow L \otimes_{\text{Mat}_n(A)} N_1 \cong L \otimes_{\text{Mat}_n(A)} N_2$$

$$\bullet \text{Hom}_{\text{Mat}_n(A)}(N_1, N_2) \cong \text{Hom}_A(L \otimes N_1, L \otimes N_2)$$

$$\bullet \text{Ext}_{\text{Mat}_n(A)}^*(N_1, N_2) \cong \text{Ext}_A^*(L \otimes N_1, L \otimes N_2)$$

(c) Homologie

A: anneau unitaire.

Def (Complexes)

Un complexe de A-module est une suite de morphismes de A-modules:

$$\cdots \rightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \rightarrow M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} M_{-1} \rightarrow \cdots$$

$$\text{tg: } d_{n-1} \circ d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad ("d^2 = 0")$$

Rq: si $(M., d)$ un complexe de A-module
alors $\text{Im}(d_n) \subset \ker(d_{n-1}) \quad \forall n$.
 $\uparrow$
sous-A-mod.

Def: (Homologie) Soit $(M., d)$ un cplx de A-mod
 $\forall i \in \mathbb{Z}$, $H_i(M.) := \frac{\ker(d_i)}{\text{Im}(d_{i+1})} \in \text{A Mod}$ $i^{\text{ème}} \text{ homologie de } (M., d)$

$$\cdots \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \rightarrow \cdots$$

Q: C'est quoi un élément de $H_i(M.)$?

- Un élément de $\ker(d_i) =: Z_i$ est appelé un i-cycle
 - Un élément de $\text{Im}(d_{i+1}) =: B_i$ est appelé un i-bord.
 - Un élément de H_i est donc une classe d'équivalence de i-cycle, où la relation d'équivalence est définie par $x \sim 0 \Leftrightarrow x$ est un i-bord.
- "C'est un i-cycle à un i-bord près"

Déf. (Suite exacte)

Une suite exacte de A -modules est un complexe de A -module $(M., d)$ avec $H_i(M.) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

"Homologie est la mesure de défaut de l'exactitude d'un cplx."

• (Suite exacte courte)

Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

$\uparrow$

Concrètement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ker(f) = \operatorname{Im}(0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ inj.} \\ \operatorname{Im}(f) = \ker(g) \\ \operatorname{Im}(g) = \ker(0) = M'' \Rightarrow g \text{ surj.} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(g) = M'' \end{array} \right.$$

i.e.,

$$M / \operatorname{Im}(f) \xrightarrow{g} M''$$

$$\left(\text{" } M / M' \cong M'' \text{ " } \right)$$

Fonctorialité

A : anneau, $M \in {}_A \text{Mod}_B$

- $\text{Hom}_A(M, -)$:

$$\forall N_1, N_2 \in {}_A \text{Mod} \quad \text{et} \quad \forall N_1 \xrightarrow{f} N_2 \quad \text{morphisme de } {}_A \text{Mod}.$$

$$\begin{aligned} \text{(Exo)} \quad & \Rightarrow \text{Hom}_A(M, N_1) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_A(M, N_2) \\ & \text{morphisme de } B\text{-Modules.} \end{aligned}$$

- $\text{Hom}_A(-, N)$: $N \in {}_A \text{Mod}_B$

$$\forall M_1 \xrightarrow{f} M_2 \quad \text{morphisme de } {}_A \text{Mod}$$

$$\text{(Exo)} \quad \text{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_A(M_1, N)$$

$$g \mapsto g \circ f$$

$$\text{morphisme de } \text{Mod}_B.$$

- Exactitude à gauche de $\text{Hom}_A(-, N)$

Prop Si $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de $A\text{Mod}$.

Soit $M \in A\text{Mod}$.

on a (par la fonctorialité de $\text{Hom}_A(M, -)$) :

$$\textcircled{A} \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{f_* = f \circ -} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{g_* = g \circ -} \text{Hom}_A(M, N'') \rightarrow 0$$

qui est seulement exacte à gauche

c-à-d. $\textcircled{A}$ est exacte sauf la surjectivité à la fin.

concrètement :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_* \text{ injectif} \\ \text{Im}(f_*) = \text{Ker}(g_*) \end{array} \right.$$

Preuve :

• Injectivité de f_* : $\forall \phi \in \text{Hom}_A(M, N')$

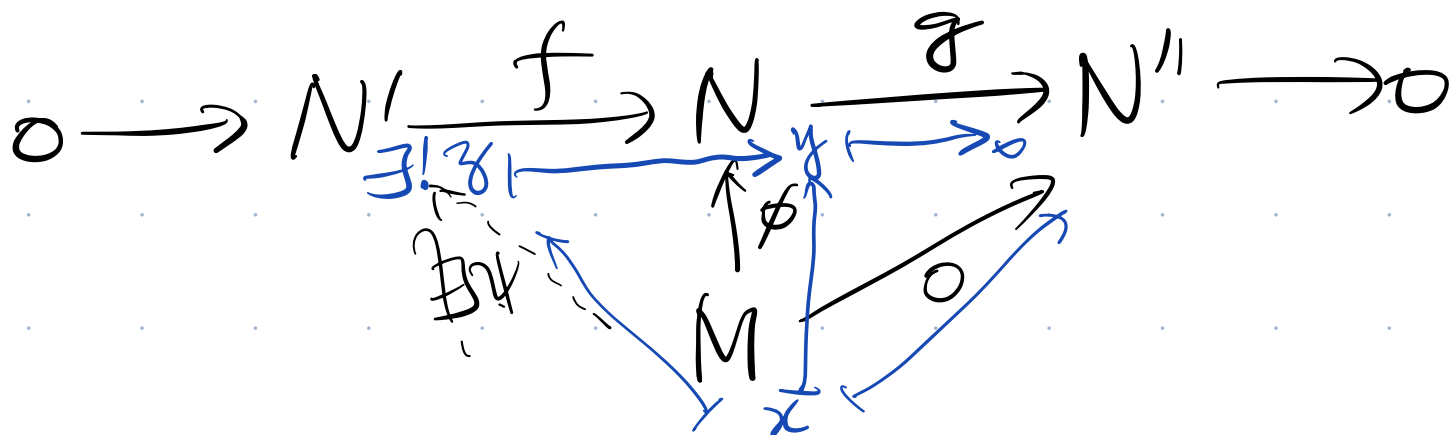
Si $\phi \in \text{Ker}(f_*)$, i.e. $f_*(\phi) = f \circ \phi = 0$

comme f injectif $\} \Rightarrow \phi = 0$
 $f \circ \phi = 0$

• $\forall \phi \in \text{Hom}_A(M, N)$ tq $\phi \in \text{Ker}(g_*)$

i.e. $g \circ \phi = 0$

Ng $\exists \psi \in \text{Hom}_A(M, N')$ tq $f \circ \psi = \phi$.



$$\forall x \in M, \quad g(\phi(x)) = (g \circ \phi)(x) = 0$$

$$\stackrel{\text{Im}(f) = \ker(g)}{\implies} \exists z \in N' \text{ tq } f(z) = \phi(x)$$

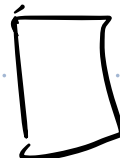
De plus f injectif $\implies z$ est unique

On définit $\psi: M \rightarrow N'$
 $x \mapsto z$

- Vérifier que ψ est un morphisme de A -Mod
 (Exo: $\psi(ax) \stackrel{?}{=} a\psi(x)$)

- Vérifier que $f \circ \psi = \phi$

(faible: $f \circ \psi(x) = f(z) \stackrel{||}{=} \phi(x)$)



Prop Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -Mod.

Soit $N \in A\text{-Mod}$ on applique $\text{Hom}_A(-, N)$
 Alors la suite
 $0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow 0$
 est seulement exacte à gauche.
 (i.e. on n'a pas nécessairement la surjectivité de f^*)

Preuve : (Exo).

Résumé : $\text{Hom}_A(M, -)$ et $\text{Hom}_A(-, M)$
 transforment une suite exacte courte à une
 suite exacte (courte) à gauche.

Exo : $\text{Hom}_A(M, -)$ préserve suite exacte
 (courte) à gauche.

Exemple $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{x^2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$
 est une suite exacte (de $\mathbb{Z}$ -mod).

Appliquer $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, -)$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Def Un A -module projectif est un A -module M
 tq $\text{Hom}_A(M, -)$ préserve les suites exactes courtes.

i.e. $\text{Hom}_A(M, -)$ préserve morphisme surjectif.

i.e. $\forall N \twoheadrightarrow N''$ on a $\text{Hom}_A(M, N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M, N'')$

i.e.

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow \exists g & \downarrow \text{id}_M \\ N & \xrightarrow{\exists f} & N'' \end{array}$$